Применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений

В.А. Пыряева

Самарский государственный социально-педагогический университет, Самара, Россия

Обоснование. Решение дифференциальных уравнений традиционными методами зачастую является достаточно трудоемким процессом. Для упрощения решения в ряде случаев, в том числе для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и с переменными коэффициентами особого вида, решения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, решения дифференциальных уравнений в частных производных, возможно применение методов операционного исчисления. Основная идея этого метода — применение преобразования Лапласа к обеим частям дифференциального уравнения, решение получившегося операторного уравнения и осуществление перехода от изображения решения к оригиналу.

Цель — на примере продемонстрировать применение метода операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений, решить задачу из курса математической физики: найти распределение температур в полуограниченном стержне, если на левом конце стержня происходит теплоизлучение в среду с нулевой температурой с коэффициентом теплообмена h = const. Начальная температура стержня u_0 = const.

Методы. Для решения задачи было составлено дифференциальное уравнение в частных производных, для удобства дальнейшего решения в нем была сделана линейная замена. Был осуществлен переход к операторному уравнению с использованием таких свойств преобразования Лапласа, как свойство линейности и свойство дифференцирования оригинала, а также с использованием теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Полученное операторное уравнение приняло вид однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. После решения данного уравнения с использованием теоремы Эфроса и свойства запаздывания преобразования Лапласа был найден оригинал полученного решения, который и является решением исходного дифференциального уравнения в частных производных.

Результаты. Решена задача физического содержания с помощью метода операционного исчисления, примененного к уравнению в частных производных. Было составлено дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка (1) с начальными условиями (2). В нем была сделана линейная замена (3), в результате чего уравнение приняло вид (4), а начальные условия — вид (5). Получено операторное уравнение (6) с начальными условиями (7). Было найдено решение операторного уравнения (8), затем, с использованием теоремы Эфроса, которая для данного уравнения имела вид (9), был найден оригинал данного решения (10), который и является решением поставленной задачи.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0, \quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial x} = hu(0,t), \quad \frac{\partial u(\infty,t)}{\partial x} = u_0 \tag{2}$$

$$\overline{u}(x,t) = u - u_0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \overline{u}(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \overline{u}(x,t)}{\partial x^2} \tag{4}$$

$$\overline{u}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \overline{u}(0,x)}{\partial x} = h(\overline{u}(0,t) + u_0), \quad \frac{\partial \overline{u}(\infty,t)}{\partial x} = 0 \tag{5}$$

$$pU = a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} \tag{6}$$

$$\frac{dU(0,p)}{dx} = h\left(U(0,p) + \frac{u_0}{p}\right), \quad \frac{dU(\infty,p)}{dx} = 0 \tag{7}$$

$$U = \frac{hu_0 a}{p(ha+\sqrt{p})} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \tag{8}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = \frac{u_0}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \eta\left(t-\frac{x}{a}\right) - e^{-ah\left(t-\frac{x}{a}\right)} \eta\left(t-\frac{x}{a}\right) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau \tag{9}$$

$$u(x,t) = u_0 \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + e^{hx+a^2h^2t} \operatorname{Erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right) \tag{10}$$

Выводы. Решение рассмотренной задачи математической физики свелось к решению дифференциального уравнения второго порядка в частных производных с использованием методов операционного исчисления, что показывает применимость данных методов к решению данного класса задач. Использование методов операционного исчисления возможно при решении дифференциальных уравнений различных классов.

Ключевые слова: методы операционного исчисления; решение дифференциальных уравнений; преобразование Лапласа; решение дифференциальных уравнений в частных производных; решение задач математической физики.

Список литературы

1. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие для студентов втузов / под ред. М.Л. Красновой, А.И. Киселева, Г.И. Макаренко. Москва: Едиториал УРСС, 2003. 176 с.
2. Битнер Г.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебное пособие. Ростов-на-Дону: Феникс, 2012. 208 с.
3. Плескунов М.А. Операционное исчисление: учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2014. 143 с.

Сведения об авторе:

Вера Алексеевна Пыряева — студентка, группа ФМФИ-621МФо, факультет математики, физики и информатики; Самарский государственный социально-педагогический университет, Самара, Россия. E-mail: pyryarva.vera@sgspu.ru

Сведения о научном руководителе:

Ольга Михайловна Кечина — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, математики и методики обучения; Самарский государственный социально-педагогический университет, Самара, Россия. E-mail: olga.kechina@pgsga.ru